مدل برنامه‌ریزی آماری ـ فازی برای انتخاب پرتفولیوی بهینه

تألیف: دکتر عادل آذر

استادیار دانشگاه تربیت مدرس و

احمد تلنگی

دانشجوی کارشناسی ارشد مدیریت بازرگانی

چکیده

فرایند بهینه‌سازی پرتفولیو، از دهه‌ی ۱۹۵۰ با بیان مفهوم تنوع‌بخشی و ارائه مدل میانگین ـ واریانس مارکویتز، شاهد تحولات چشمگیری بوده است. تلاش گسترده‌ی نظریه‌پردازان مالی در کاربردی‌تر کردن مدل‌های انتخاب پرتفولیو، آنان را به سوی مدل‌های چندمعیاره ـ بویژه آرمانی ـ کشانده است.

در سال ۱۹۶۵ پروفسور عسگر لطفی‌زاده اساس ریاضیات کلاسیک را با بیان تئوری مجموعه‌های فازی متحول ساخت. وی معانی زبان طبیعی و ابهام ناشی از محیط و اطلاعات محیطی را با ریاضیات دوارزشی ترکیب نمود و ابزار نیرومندی را تحت عنوان "منطق فازی" برای برنامه‌ریزی و تصمیم‌گیری ارائه نمود.

در این مقاله ابتدا اشاره‌ای اجمالی به سیر تکاملی مدل‌های انتخاب پرتفولیو و مفهوم برنامه‌ریزی آرمانی ـ فازی می‌شود و از بین مدل‌های معتبر بهینه‌سازی پرتفولیو، مدل تاپو و فینستین انتخاب برای آن مدل برنامه‌ریزی آرمانی ـ فازی ارائه گردیده است. در ادامه کاربرد آن همراه با یک نمونه نشان داده می‌شود.

واژه‌های کلیدی:

بهینه‌سازی پرتفولیو (Portfolio Optimization)

معیار میانگین ـ واریانس (Mean-Variance Criteria)

برنامه‌ریزی آرمانی (Goal Programming)

برنامه‌ریزی آرمانی ـ فازی (Fuzzy-Goal Programming)

مقدمه

در ۱۹۵۹ مارکوتیز و توبین سرمایه‌گذاری خویش را تحت شرایط عدم اطمینان بر مبنای میانگین و انحراف معیار عایدات بیان نمودند. در اواخر دهه‌ی ۶۰ میلادی بسیاری از مسائل مالی ـ اقتصادی با استفاده از تکنیک‌های تحقیق در عملیات مورد بررسی قرار گرفتند و روش‌های بهینه‌سازی برای یافتن جواب بهینه این‌گونه مسائل ارائه شدند. به‌طوریکه امروزه ابزارهای تحقیق در عملیات همانند تجزیه و تحلیل تصمیم، برآوردهای آماری، شبیه‌سازی، فرایندهای تصادفی، بهینه‌سازی، سیستم‌های پشتیبانی تصمیم‌گیری و هوش مصنوعی جزئی جداناپذیر از برخی جنبه‌های عملیات مالی شده‌اند.

در بیشتر مدل‌های پیشنهادی برای مدیریت پرتفولیو[1]، مدل ساده شده‌ای، جایگزین مدل واقعی می‌گردد. توجه به سرمایه‌گذار عادی به جای سرمایه‌گذار خاص و آن‌چه که هست، خود شاهدی بر این مدعاست. مفروضات بیان شده برای توصیف سرمایه‌گذار معمولی اغلب ناکافی و حتی گمراه‌کننده می‌باشد. برای مثال به‌کارگیری مدل دوبعدی مارکوتیز، معیار میانگین ـ واریانس (M - V) ، در جهان واقع به احتمال زیاد بسیار مشکل باشد. M - V مفروضات

1- Portolio Management

غیرواقعی بسیاری را در مورد ترجیحات سرمایه‌گذار و یا در بیان بدیل‌های سرمایه‌گذاری در نظر می‌گیرد. لذا باید به‌گونه‌ای عمل کرد که پیچیدگی دنیای واقع در ساده‌ترین مدل‌ها از نظر کاربردی ارائه شود. به عبارت دیگر باید به این سؤال اساسی پاسخ داد که چه منطقی برگزیده شود تا قضاوت ـ تا حد ممکن ـ صحیحی از مجموعه‌ی اطلاعاتی که در دسترس ماست عایدمان شود.

تئوری مجموعه‌های فازی[1] سعی در ایجاد نزدیکی بیشتر بین دقت ریاضیات کلاسیک و نیز ابهام کلی موجود در دنیای واقعی دارد. تعمق هرچه بیشتر در تئوری مجموعه‌های فازی و به دنبال آن منطق فازی[2]، ما را با این سؤال روبرو خواهد کرد که آیا می‌توان در دامنه‌ی فرضیه‌هایی که در علوم مدیریتی، مالی و اقتصادی مطرح است مدل‌هایی از نوع فازی ارائه داد؟

در مسائل واقعی بسیاری از تصمیم‌گیری‌ها در محیط‌هایی اتخاذ می‌شوند که اهداف و محدودیت‌ها و نتایج حاصله کاملاً شناخته شده نیست و تصمیم‌گیری برای انتخاب پرتفولیوی بهینه[3]، براساس اطلاعات حاصل از محیط مالی ـ اقتصادی (گزارش‌های سالانه‌ی شرکت‌ها، نرخ تورم، نرخ رشد، سیاست‌های پولی و مالی دولت و ...) که همواره توام با درجه‌ای از ابهام می‌باشد، انجام می‌پذیرد.

بیان این نادقیقی‌ها[4] با مفاهیم ریاضیات کلاسیک و قطعی در قالب مدل‌های برنامه‌ریزی و بهینه‌سازی پرتفولیو غیرممکن می‌باشد، لذا به‌کارگیری منطق فازی برای غلبه بر ابهام محیطی ـ اطلاعاتی، تصمیم‌گیران مالی را یاری خواهد داد.

۱ـ مدل‌های برنامه‌ریزی ریاضی انتخاب پرتفولیوی بهینه

اساس بیشتر مدل‌های موجود برای انتخاب پرتفولیو در ادبیات مالی را عوامل پیشنهادی مارکوتیز شکل می‌دهد. از برجسته‌ترین نکات مورد توجه در مدل مارکوتیز توجه به ریسک سرمایه‌گذاری نه تنها براساس انحراف معیار یک طرح (ورقه سهام) بلکه توجه به ریسک مجموعه‌ی سرمایه‌گذاری است[۱۲]. مدل مارکوتیز به صورت زیر می‌باشد[۹]:

1- Fuzzy Sets Theory

2- Fuzzy logic

3- Optimal portfolio

4- Fuzzinnes

$$\text{Minimize} \quad -\lambda E_p + V_p$$

$$E_p = \sum_{i=1}^{N} X_i E_i$$

$$V_p = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} X_i X_j C_{ij} \qquad (1)$$

S.T:

$$\sum_{i=1}^{N} X_i = 1$$

$$\lambda \geq 0$$

که در آن E_p ، عایدی مورد انتظار پرتفولیو؛ V_p ، ریسک مجموعه پرتفولیو؛ X_i ، نسبتی از کل سرمایه‌گذاری در ورقه سهام شماره‌ی i؛ X_j ، نسبتی از کل سرمایه‌گذاری در ورقه‌ی سهام شمارهٔ j؛ C_{ij} ، کوواریانس عایدی بین سهام i با سهام j ؛ و λ درجه‌ی ریسک‌گریزی[1] سرمایه‌گذار می‌باشند.

به‌خاطر مشکلات محاسباتی و فنی در مدل مارکوتیز، چندی بعد شارپ با تعیین ضریب حساسیت بتا (β) ، به‌عنوان ریسک، مدل تک‌شاخصی[2] را در سال ۱۹۶۱ ارائه نمود[۱۲]. مزیت مدل تک‌شاخصیِ شارپ، سادگی و کاهش داده‌های مورد نیاز است. این مدل آماری برای بیان فرآیند تهیه عایدی می‌باشد و مفهوم اساسی در آن این است که تمامی اوراق بهادار از نوسانات عمومی بازار تاثیر می‌پذیرند. به‌عبارت دیگر عایدی سهام i با یک شاخص عمومی I، مرتبط است و با یک معادله‌ی خطی به‌صورت زیر بیان می‌شود[۳]:

1- Risk Aversion

2- Single Index Model

$$R_{it} = \alpha_i + \beta_i I_t + e_i \qquad (II)$$

که R_{it}، نرخ عایدی سهام در دوره‌ی t؛ α_i، عنصر عایدی سهام که مستقل از شاخص است؛ I_t، ارزش شاخص برای دوره‌ی t و β_i، مقیاس تغییر متوسط در R_i به‌عنوان نتیجه‌ی یک تغییر معین در شاخص I. شاخص متداول مورد استفاده برای این مدل، نرخ عایدی پرتفولیوی بازار می‌باشد که با R_m نشان داده می‌شود.

مدل‌های کوواریانس مارکوتیز و برنامه‌ریزی خطی شارپ قادر به تعیین پرتفولیوی کارا می‌باشند اما سرمایه‌گذار را در انتخاب پرتفولیوهائی که با ترجیحات وی بهترین تناسب را داشته باشد یاری نمی‌دهند. ارجحیت سرمایه‌گذار به‌عنوان مجموعه‌ای از اهداف برای پرتفولیو همانند شرایط صنعت و ... به‌راحتی نمی‌تواند در مدل‌های فوق ادغام گردد(۴). زیرا که شاید سرمایه‌گذار اهدافی غیر از بهینه‌سازی صرفِ ارزش مالی دارائی داشته باشد. برای مثال وی یک نرخ رشد ثابتی از ارزش پرتفولیو یا یک نسبت سود پرداختی حداقلی را مورد نظر داشته باشد(۱۰).

با توجه به نکات بالا، گام منطقی بعدی ۱) کاهش‌دادن تعداد مفروضات و ۲) شناختن عواملی است که ممکن است قیمت اوراق بهادار را تحت تاثیر قرار دهد(۱۲)، زیرا که شواهد تجربی بسیار محکمی وجود دارد که چندین عامل مهم عایدات اوراق را به جز آن عاملی که در مدل تک‌شاخصی عنوان شد، تحت تاثیر قرار می‌دهند(۳).

در راستای این حرکت پروفسور راس در دهه‌ی ۱۹۷۰ تئوری قیمت‌گذاری آربیتراژ[1] (APT) را پایه‌گذاری نمود. مفهوم اساسی در APT، قانون وجود یک قیمت می‌باشد؛ یعنی دو ورقه‌ای که در ریسک و عایدی مشابه‌اند نمی‌توانند در قیمت‌های متفاوت فروخته شوند.

به‌وضوح دیدیم که در مدل تک‌شاخصی، منابع غیر بازاری ریسک حذف می‌شدند. مدل چندشاخصی[2] اجازه‌ی ادغام این منابع اضافی ریسک را فراهم می‌آورد و در حالی که در اطلاعات ورودی صرفه‌جوئی می‌نماید مرز کارای[3] بهتری را نیز ارائه می‌دهد. به‌عبارت دیگر

1- Arbitrage pricing theory

2- Multi-Index Model

3- Efficient Frontier

عایدی مورد انتظار در APT به شرح زیر بیان می‌شود:

$$R_i = \alpha_i + \beta_{i1} I_1 + \beta_{i2} I_2 + \ldots + \beta_{ik} I_k + e_i \qquad \text{(III)}$$

که در آن R_i، نرخ عایدی سهام؛ α_i، عنصر عایدی سهام که مستقل از شاخص است؛ I_k ارزش شاخص kام؛ β_i، مقیاس تغییر متوسط در R_i به‌عنوان نتیجه یک تغییر معین در شاخص kام و e_i عبارت خطا می‌باشد.

تجارب عملی نشان داده است که استفاده از ویژگی‌های عایدی و ریسک، تمامی اطلاعات مورد نیاز را برای سرمایه‌گذاری فراهم می‌نماید. ویژگی‌های اضافی می‌تواند هم از طریق اهداف (علائق) سرمایه‌گذار و هم با در نظر گرفتن محدودیت‌های مشخص سرمایه‌گذاری که سرمایه‌گذار با آن روبرو است و یا مشخصات متمایز بدیل‌های سرمایه‌گذاران از اهمیت سودهای تقسیمی، انتظارات در مورد رشد و ثبات مالی، رشد در حجم فروش، سهم بازار و کل دارائی‌ها، استفاده‌ی مفید از اهرم مالی، بازده فروش و سرمایه و ... تبیین شود[۱]. هم‌چنین بسیاری از رویکردهای متداول و بخصوص رویکرد M - V فرض می‌کند که دانش کاملی از توزیع‌های عواید سرمایه‌گذاری وجود دارد درحالی که در واقع سرمایه‌گذار چنین اطلاعات کاملی را در مورد عواید آتی احتمالی هرگز نخواهد داشت. با توجه به مطالب فوق در رویکردهای M - V ، تک‌شاخصی و APT امکان اعمال محدودیت‌های خود خواسته وجود ندارد.

به عقیده‌ی Vladimirou و Mulvey یک مدل واقعی برای برنامه‌ریزی سرمایه‌گذاری باید دارای ویژگی‌های زیر باشد:

۱ـ توانائی منظور نمودن طرز تلقی‌های سرمایه‌گذار (در مورد تحمل ریسک).

۲ـ در نظر گرفتن هزینه‌های مبادلاتی و مالیاتی.

۳ـ قابل فهم بودن برای تصمیم‌گیران.

۴ـ توانائی استفاده از سایر عوامل موجود در تصمیم‌گیری ویژه، شامل ملاحظات رشد، بودجه، حقوقی و ... در سرمایه‌گذاری.

بنا به نظر Spronk مناسب‌ترین چارچوب برای مدل‌سازی تصمیم‌گیری برای سرمایه‌گذاری، رویکرد چندمعیاره[1] است. البته نمونه‌های بسیاری از تصمیم‌گیری چندمعیاره در مدل‌سازی پرتفولیو وجود دارد[2] که یا بیشتر آن‌ها مناسب نیستند و یا به همه‌ی جنبه‌های فرایند سرمایه‌گذاری توجه ننموده‌اند و یا این که فقط به زیبائی مدل توجه نموده‌اند(۱۰).

۲ـ برنامه‌ریزی آرمانی ـ فازی[3] (FGP)

ایده‌ی برنامه‌ریزی آرمانی در ابتدا توسط چارنزوکوپر و سپس توسط ایجیری مطرح گردید. ایجیری موضوع برنامه‌ریزی آرمانی (GP)، را به تصمیم‌گیری‌های مدیریتی، مالی کشاند(۱۱).

برنامه‌ریزی آرمانی نوع خاصی از برنامه‌ریزی خطی است که با اهداف چندگانه و متضاد، اهداف سطح پائین تنها زمانی در نظر گرفته می‌شوند که اهداف سطح بالا برآورده شوند. به‌عبارت دیگر GP راه حرکت هم‌زمان به سوی چندین هدف را نشان می‌دهد. برخلاف برنامه‌ریزی خطی (LP) که هدف را بیشینه یا کمینه می‌کند، GP انحرافات بین اهداف مورد نظر و نتایج واقعی را کمینه می‌کند(۴).

مدل عمومی برنامه‌ریزی آرمانی (GP) زیر را ایکنزیو ارایه کرد(۱۱):

$$\text{Minimize} \quad a = \left\{ g_{۱}(\bar{n}, \bar{p}), g_{۲}(\bar{n}, \bar{p}), \dots g_k(\bar{n}, \bar{p}) \right\}$$

$$\text{S.T:} \quad f_i(x) + n_i - p_i = b_i \quad i = ۱, \dots, m \qquad \text{(IV)}$$

$$x, \bar{n}, \bar{p} \geq ۰$$

که در آن x_j، j امین متغیر

a، تابع دست‌یابی

$g_k(\bar{n}, \bar{p})$، تابع متغیرهای انحرافی در الویت k

1- Multi-Attribute criteria

۲- از الگوهای برنامه‌ریزی آرمانی و چندمعیاره‌ی معتبر در انتخاب پرتفولیو می‌توان به الگوهای اشاره کرد:
(A.J. Lerro, S.M. Lee, 1973) , (Lee, S.M. Chesser, D.I., 1980) , Sang M. Lee, D.Chesser, 1980) , (Muhlemann, A.P.; A.G.Lockett. & A.E. Gear, 1978) , (Tape & Feinstein 193).

3- Fuzzy-Goal programming

b_i ، مقادیر سمت راست برای آرمان i

n_i ، انحراف منفی از آرمان i

p_i ، انحراف مثبت از آرمان i

$f_i(x)$ تابعی از متغیرهای تصمیم در هدف i

و k تعداد اولویت‌ها در مدل است.

در آرمان‌های نوع سود، انحرافات منفی و در آرمان‌های نوع هزینه، انحرافات مثبت باید به حداقل برسند.

اگرچه با پیدایش برنامه‌ریزی آرمانی بسیاری از مسائل واقعی که تا آن زمان غیرقابل حل تصور می‌شدند، صورت‌بندی شدند ولی هم‌چنان بسیاری از مفروضات آن‌ها غیر واقعی جلوه می‌نمود. از جمله می‌توان به قطعی و دقیق فرض کردن سطح آرمان‌ها، مقادیر سمت راست محدودیت‌ها، و پارامترهای مدل اشاره کرد. از آن‌جا که روش ریاضی مناسبی برای اندازه‌گیری داده‌های نادقیق و مبهم وجود نداشت، محققان به این معضل به دیده‌ی اغماض نگاه می‌کردند.

استفاده از منطق مجموعه‌های فازی که توسط پروفسور عسگری لطفی‌زاده در ۱۹۶۵ بنا نهاده شد، برنامه‌ریزان را در اندازه‌گیری و بیان نادقیقی داده‌ها و اطلاعات یاری داد. این روش منطقی نوین، اساس بسیاری از نظریه‌های انقلابی در رشته‌های گوناگون علوم و معارف بشری شد. بدین‌سان با امتزاج GP و تئوری فازی فن پیشرفته و مفیدی در برنامه‌ریزی به نام برنامه‌ریزی فازی ـ آرمانی (FGP) شکل گرفت.

بسیاری از مفروضات و اجزای مدل GP تحت تاثیر اطلاعات حاصل از تصمیم‌گیران و محیط اطراف است که برخوردار از درجه‌ای از ابهام و نادقیقی است. یک آرمان باارزش مقداری نادقیق را آرمان فازی گویند. مسأله برنامه‌ریزی آرمانی با k آرمان نادقیق را می‌توان به صورت زیر بیان کرد[۱۱]:

$$\begin{aligned}&\text{Find} \quad x\\&\text{S.T:}\\&\qquad G_{۱}(x) \overset{\Theta}{\sim} b_i \quad (i = ۱, \dots, k) \qquad (۷)\\&\qquad x \geq ۰\end{aligned}$$

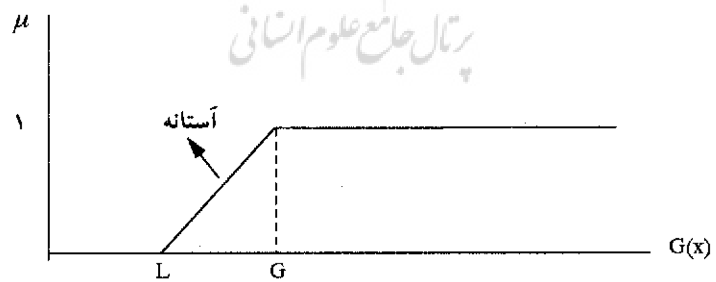
در این صورت‌بندی علامت «~» بیانگر فازی‌بودن سطح آرمان است و عبارت Θ بیانگر $\geq$ ، $=$ و یا $\leq$ است. برای مثال $G_1(x) \approx b_1$ بدین معناست که هدف $G_1(x)$ باید به سطحی دست یابد که "تقریباً بزرگ‌تر یا مساوی" با ارزش b_1 باشد.

بلمن و لطفی‌زاده طی مقاله‌ای نشان دادند در صورتی که n آرمان فازی، $G_1 , \ldots , G_n$ و m محدودیت فازی؛ $C_1 , \ldots , C_n$ ، وجود داشته باشد جواب مطلوب زمانی حاصل می‌شود که از ترکیب آن‌ها یک تصمیم فازی حاصل شود. تصمیم فازی[1] ؛ D ، یک مجموعه‌ی فازی است که از اشتراک آرمان‌ها و محدودیت‌های فازی حاصل می‌شود:

$$D = G_1 \cap G_2 \cap \ldots \cap G_n \cap C_1 \cap C_2 \cap \ldots \cap C_m$$

آنها برای هریک از آرمان‌ها و محدودیت‌های نوع بیشینه و کمینه، توابع عضویت[2] خطی ارائه داده‌اند. آن‌ها معتقدند چنان‌چه آرمان از نوع بیشینه باشد، می‌توان مشخص کرد که تصمیم‌گیرنده تا چه مقدار کم‌تر از آن‌را می‌تواند تحمل کند. بنابراین آن دامنه را حد تحمل[3] می‌نامند. به همین طریق اگر آرمان از نوع کمینه باشد می‌توان با تعیین حد بالای تحمل یک آستانهٔ انحراف از آرمان را تعریف کرد.

شکل‌های (الف و ب) بیانگر نحوه‌ی تعیین تابع عضویت آرمان‌های نوع حداکثر و حداقل است.

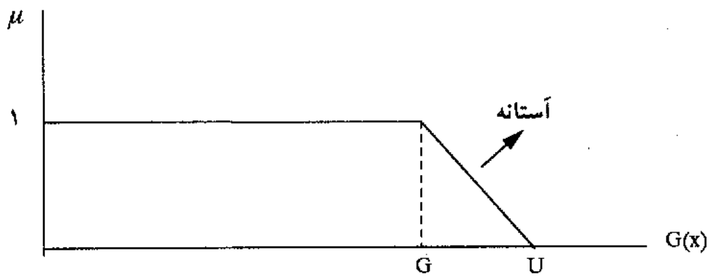


شکل الف ـ نمای هندسی تابع عضویت برای آرمان نوع بیشینه

1- Fuzzy Decision

2- Membership Function

3- Tolerance Limit



شکل ب ـ نمای هندسی تابع عضویت برای آرمان نوع کمینه

براساس شکل (الف) می‌توان شیب آستانه حد تحمل را به‌صورت زیر تعریف کرد:

$$\mu_{G(x)} = \begin{cases} 1 & \text{اگر} \quad G(x) \geq G \\ \dfrac{G(x) - L}{G - L} & \text{اگر} \quad L \leq G(x) \leq G \\ 0 & \text{اگر} \quad G(x) \leq L \end{cases}$$

که در آن $\Delta = G - L$ حد تحمل یا بازه‌ی تحمل خوانده می‌شود.

براساس شکل (ب) می‌توان تابع عضویت از نوع حداقل را به‌صورت زیر تعریف کرد:

$$\mu_{G(x)} = \begin{cases} 1 & \text{اگر} \quad G(x) \leq G \\ \dfrac{U - G(x)}{U - G} & \text{اگر} \quad G \leq G(x) \leq U \\ 0 & \text{اگر} \quad G(x) \geq U \end{cases}$$

که در آن $U - G$ بازه‌ی تحمل، Δ، خوانده می‌شود. براساس تعاریف اولیه‌ی بلمن و لطفی‌زاده از تابع عضویت، محققان مدل‌های مختلفی دربارهٔ چگونگی تبدیل برنامه‌ریزی آرمانی فازی به

مدل قطعی ارائه داده‌اند[1].

با توجه به مطالب فوق تابع عضویت برای مدل ۷ عبارت خواهد بود از:(۷)

$$\mu_{G_i(x)} = \begin{cases} 1 & \text{اگر } G_i(x) = b_i \\ f(G_i(x), b_i) & \text{اگر } G_i(x) \neq b_i \end{cases}$$

$$0 \leq \mu_{G_i(x)} \leq 1$$

و می‌توان نوشت:

$$\mu_{G_i(x)} = \begin{cases} 0 & \text{اگر } G_i(x) \leq b_i = \Delta_i \\ G_i(x) - (b_i - \Delta_i) / \Delta_i & \text{اگر } b_i - \Delta_i \leq G_i(x) \leq b_i \\ (b_i + \Delta_i) - G_i(x) / \Delta_i & \text{اگر } G_i(x) \leq b_i + \Delta_i \\ 0 & \text{اگر } G_i(x) \geq b_i + \Delta_i \end{cases}$$

که در آن Δ_i ثابت ذهنی انتخابی برای انحراف از سطوح مورد نظر b_iها است. با استفاده از تعریف تصمیم فازی، تابع عضویت مجموعه‌ی تصمیم، $\mu\Delta(x)$ به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\mu_D(x) = \mu G_i(x) \wedge \mu G_i(x) \wedge \ldots \wedge \mu (G_M(x)$$
$$= \underset{i}{\text{Mim}}\, \mu G_i(x)$$

و تصمیم بیشینه‌سازی عبارت خواهد بود از:

۱ ـ خواننده جهت اطلاع و آشنائی بیشتر با سیر تکوینی الگوهای آرمانی ـ فازی می‌تواند به مقاله‌ی "برنامه‌ریزی آرمانی شولا تکنیکی نوین برای برنامه‌ریزان"، فصلنامه‌ی علمی ـ پژوهشی دانشگاه شاهد شماره‌های (۹ و ۱۰)، عادل آذر و عزیزاله معماریانی مراجعه کند.

$$\text{Mzx}\,\mu_D(x) = \underset{x}{\text{Max}}\ \underset{i}{\text{Min}}\ \mu(G_i(x))$$

در نتیجه پاسخ مدل V FGP معادل حل مسائل زیر خواهد بود.(۷)

$$\underset{x\geq o}{\text{Max}}\ \underset{i}{\text{Min}} \quad G_i(x) - b_i/\Delta_i \qquad \text{(VI)}$$

$$b_i - \Delta_i \leq G_i(x) \leq b_i$$

$$\underset{x\geq o}{\text{Max}}\ \underset{i}{\text{Min}} \quad (b_i + \Delta_i) - G_i(x) - b_i/\Delta_i \qquad \text{(VII)}$$

$$b_i < G_i(x) \leq b_i + \Delta_i$$

اگر $\text{Min}\,\mu = \lambda$ باشد در نتیجه معادل برنامه‌ریزی قطعی مسائل VI و VII عبارت خواهد بود از:(۱۱)

$$\text{Max}\ \lambda \qquad \text{(VIII)}$$

S.T.

$$\lambda \leq G_i(x) - (b_i - \Delta_i)/\Delta_i$$

$$\lambda \leq (b_i + \Delta_i) - G_i(x)/\Delta_i$$

$$Ax < b$$

$$\lambda, A \geq O$$

۳ـ مدل آرمانی ـ فازی برای انتخاب پرتفولیوی بهینه

شاید بتوان علت کار برد منطق مفاهیم نادقیق را این دانست که روش‌های تجزیه و تحلیل و مدل‌های موجود در بررسی علوم مختلف کلاً بر مدل‌های ریاضی استوار است که خود مبتنی بر منطق ارسطویی و ریاضیات کلاسیک است. حال آن که استدلال کردن در آن زمینه‌های علمی و فنی که با عدم دقت و قطعیت عجین است در قالب منطق دو ارزشی و ریاضیات کلاسیک امکان‌پذیر نیست. فرضیه‌های مورد استفاده در مدل‌هایی که ریاضیات کلاسیک برای علوم

مختلف (از جمله مدیریت، اقتصاد و مالی) ارائه می‌دهد، اغلب پیچیده بوده و کاربرد جواب حاصل از حل مدل‌ها، لزوماً منجر به حداکثر شدن کارایی نمی‌شود. پارامترهای این مدل‌ها قطعی و تصادفی نیز نیستند. اشتباه متداول در مدل‌سازی از عدم قطعیت موجود در سیستم‌های واقعی این است که مفاهیم عدم قطعیت احتمالی، جایگزین عدم قطعیت (به معنای فازی) می‌شوند و در نتیجه مدل‌های مورد بحث نمی‌توانند تصویر صحیح و جامعی از واقعیت‌های موجود در سیستم ارائه دهد.[۱۳]

مدل‌های انتخاب پرتفولیو نیز برمبنای منطق فوق‌الذکر تدوین گردیده‌اند و نقاط ضعف مذکور را در برخورد با جهان واقعی در خود دارند. در این قسمت ابتدا با توجه به سادگی و قابلیت کاربرد بیشتر به مدل آرمانی تاپو و فینستین می‌پردازیم و سپس مدل FGP برای انتخاب پرتفولیو را ارائه می‌کنیم.

محققان فوق در سال ۱۹۹۳ با انجام تغییراتی بر مدل خطی (۱۹۹۱) مدل زیر را ارائه دادند:

$$\text{Minimize} \quad \sum_{t=1}^{T} (v_t + w_t)$$

$$\begin{aligned}
&\text{S.T.} \\
&V_t - W_t - \sum_i a_{ij} x_j = o \quad t = 1, \dots, T, \\
&\Sigma r_j x_j \geq \rho \, MO, \\
&\Sigma x_j = MO, \\
&O \leq x_j \leq u_j \quad j = 1, \dots, n, \\
&V_t, W_t \geq O
\end{aligned} \qquad \text{(IX)}$$

که در آن r_j متغیری تصادفی و بیانگر نرخ عایدی دوره‌ای برای S_j، فرامین دارائی، با شناخت r_{tj} در دوره‌ی t می‌باشد؛ x_j، متغیر تصمیم، بیانگر مقدار وجهی است که در S_j به‌عنوان بخشی از MO سرمایه‌گذاری می‌شود، ρ، حداقل نرخ عایدی مورد انتظار سرمایه‌گذار؛ و U_j، حداکثر مبلغ مجاز سرمایه‌گذاری در S_j می‌باشد. و V_t و W_t متغیرهای انحرافی می‌باشند.

به عقیده‌ی Y - K، مدل فوق نتایج مشابهی را مانند مدل کمینه‌سازی کوواریانس مارکوتیز به‌دست می‌دهد. هم‌چنین جواب‌های حاصل از آن شامل عناصر غیر صفر کم‌تری است و از این‌رو انجام عملیات متعدد و هزینه‌ها عملیات را کاهش می‌دهد. به‌طور تجربی نیز این مدل نسبت به مدل‌های قبلی در مطالعات انجام شده توسط Y - K با استفاده از اطلاعات بورس اوزاکاوتوکیو بهتر عمل می‌نماید.

مدل فازی مدل فوق را می‌توان به‌صورت زیر بیان نمود:

$$\begin{aligned}
&\text{Fin } x \\
&\text{S.T. }: \Sigma x_j \simeq MO \qquad\qquad (X)\\
&\quad \Sigma r_j x_j \gtrsim \rho MO \\
&\quad \Sigma z_{tj} x_j \simeq O \quad t = ۱, \dots, T \\
&\quad O \lesssim x_j \lesssim u_j \quad j = ۱, \dots, n
\end{aligned}$$

۴ـ یک مثال:

در این قسمت جهت نمایش نحوه‌ی عملکرد مدل آرمانی ـ فازی انتخاب پرتفولیو، ابتدا یک مثال برای مدل آرمانی ارائه می‌گردد و سپس مدل آرمانی ـ فازی آن مطرح می‌شود.

۱) مثال زیر را با دو ورقه سهم و دو دوره‌ی زمانی در نظر بگیرید.

	ورقه‌ی j	
t	۱	۲
۱	٪۱۰	٪۲
۲	۱	۱۴
	۵/۵	۸

اگر $M_O = \$\ ۱۰۰$ و $\rho = ۰/۰۶۹۹$ باشد مدل آرمانی را به‌صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\text{Minimize} \quad \frac{۱}{۲}(v_۱ + w_۱ + v_۲ + w_۲)$$

$$\text{S.T}: \quad v_۱ - w_۱ - ۰/۰۴۵ x_۱ + ۰/۰۶ x_۲ = ۰$$

$$v_۱ - w_۱ + ۰/۰۴۵ x_۱ - ۰/۰۶ x_۲ = ۰$$

$$۰/۰۵۵ x_۱ + ۰/۰۸ x_۲ \geq (۱۰۰)(۰/۰۶۹۹)$$

$$x_۱ + x_۲ = ۱۰۰$$

۲) مدل آرمانی ـ فازی مثال نمونه به‌صورت زیر خواهد بود.

Find x

S.T : $x_۱ + x_۲ \simeq ۱۰۰$

$$۵/۵ x_۱ + ۸ x_۲ \simeq ۶/۹۹$$

$$-۴/۵ x_۱ + ۶ x_۲ \simeq ۰$$

$$۴/۵ x_۱ - ۶ x_۲ \simeq ۰$$

نتایج حاصل از به‌کارگیری سه مدل برنامه‌ریزی کوادراتیک مارکوتیز، آرمانی ـ فازی در جدول شماره‌ی (۱) خلاصه گردیده است:

جدول شماره ۱ـ نتایج حاصل از به‌کارگیری مدل‌ها در انتخاب پرتفولیوی بهینه

مدل / متغیر	آرمانی	کوادراتیک	آرمانی ـ فازی
$x_۱^*$	۰/۴۰۴	۰/۵۷۱	۰/۵۷۱
$x_۲^*$	۰/۵۹۶	۰/۴۲۹	۰/۴۲۹
$R_p^{(۱)}$	۰/۰۷۰	۰/۰۶۶	۰/۰۶۶
$V_p^{(۲)}$	۰/۱۶۰	۰/۱۳۰	۰/۱۳۰

(۱) $R\rho = \Sigma x_i R_i$

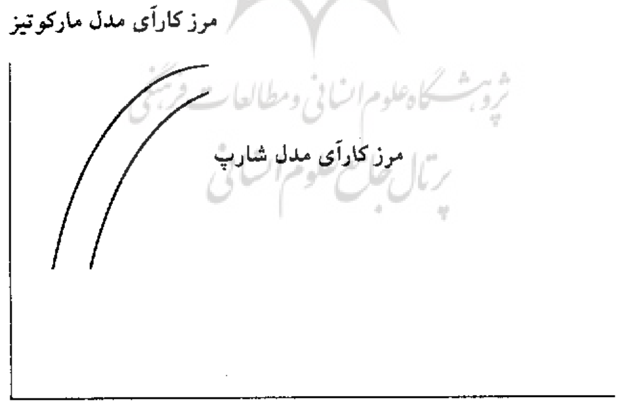
(۲) $V\rho = \Sigma x_i^۲ \text{Var}(R_i) + \Sigma_i \Sigma_j x_i x_j \text{Cov}(R_i R_j)$

نتایج به دست آمده در جدول شماره‌ی (۱) نشان‌دهنده‌ی این است که مدل برنامه‌ریزی آرمانی ـ فازی جواب‌های دقیقاً یک‌سانی را با مدل برنامه‌ریزی کوادراتیک ارائه می‌دهد.

۵ ـ نتیجه‌گیری

تلاش محققان در طول نیم قرن اخیر در جهت هر چه کاربردی‌تر نمودن مدل‌های انتخاب پرتفولیو، بویژه مدل مارکتیو، بوده است. مشکل اصلی در استفاده از مدل مارتوتیرن محاسبهٔ $\frac{n^2 - 3n}{2}$ پارامتر جهت تولید مرزی کارا به ازای هر مقدار معینی از λ(درجه‌ی ریسک گریزی) و ۲) عدم امکان بیان محدودیت‌های مشخص سرمایه‌گذار است.

مدل شارپ در دههٔ ۱۹۶۰ در جهت برطرف نمودن مشکل شماره (۱) ارائه گردید و تا حدودی نیز توانست براین مشکل فائق آید (یعنی کاهش تعداد پارامترهای قابل محاسبه به $3n + 2$ پارامتر). لیکن علاوه بر عدم رفع مشکل شمارهٔ (۲)، مرزکارای حاصل از به‌کارگیری مدل شارپ به کارایی مدل مارکوتیز نمی‌باشد. (شکل ج)



هر چند مدل آرمانی F - T حجم عملیات را تا حد قابل توجهی کاهش داده و از سادگی نسبتاً بالائی برخوردار می‌باشد (جدول شماره‌ی ۲)، ولی دو مشکل اصلی این مدل اولاً، تعیین آرمان دقیق عایدی مورد انتظار یا نسبت سرمایه‌گذاری مشخص در سهامی معین و ثانیاً، تولید

جواب‌های «تا حدودی نزدیک» به مدل مارکوتیز می‌باشد.

جدول شماره ۲ اطلاعات مورد نیاز برای مدل‌های انتخاب پرتفولیو

اطلاعات مورد نیاز برای یک مجموعه پرتفولیو ۱۰۰ تایی

مدل	عایدی	واریانس	کوواریانس	کل
مارکوتیز	۱۰۰	۱۰۰	۴۹۵۰	۵۱۵۰
تک شاخصی	۱۰۱	۱۰۱	۱۰۰	۳۰۲
چند شاخصی	۱۰۵	۱۰۵	۵۰۰	۷۱۰
آرمانی*	۱۰۰	۱۲۰۰	—	۱۳۰۰

* با فرض این که ۱۲ = T باشد

مدل آرمانی ـ فازی ارائه شده در این مقاله مشکلات فوق را برطرف و انعطاف لازم را در اعمال هرگونه محدودیت مشخص سرمایه‌گذاری و علائق سرمایه‌گذار به وجود می‌آورد. در هر دو مدل آرمانی و آرمانی ـ فازی درجه ریسک‌پذیری شخص به‌طور ضمنی صفر در نظر گرفته شده است (یعنی $-\lambda = 0$) و با این فرض مدل کوادراتیک مارکوتیز حل و با دو مدل دیگر مقایسه گردیده است. به منظور اعمال درجه ریسک گریزی (یا ریسک‌پذیری) شخص سرمایه‌گذار باید تغییراتی را در مدل‌های فوق انجام داد که در این مقاله به چنین مواردی پرداخته نمی‌شود.

پیشنهادها

نتایج به دست آمده از به‌کارگیری منطق فازی در علوم مختلف بیانگر اهمیت فزاینده‌ی این منطق در عرصه‌ی جهان واقع است. نظریه‌های مالی با تکیه بر برخی مفروضات بنا نهاده شده‌اند (مانند انسان عقلائی، انحراف استاندارد که اساس آن‌ها در چند دهه‌ی اخیر مورد تردید صاحب‌نظران واقع شده است.

برای انطباق هر چه بیشتر با واقعیت‌ها منطق فازی ابزار نیرومندی است که نظریه‌های مالی

ناگزیر به استفاده از آن هستند. تصمیم گیران در مسائل مالی ـ اقتصادی با توسل به منطق فازی در مواردی هم‌چون؛ تعیین ساختار بهینه‌ی سرمایه، تعیین ارزش زمانی پول، ارزیابی مالی ـ اقتصادی پروژه‌های سرمایه گذاری، بودجه‌بندی سرمایه‌ای و ... ، می‌توانند تصمیم‌های مؤثرتری را اتخاذ نمایند.

فهرست منابع

1) Clark , john j., Hidelang Thomas j. and pritchard, Robert E., Capital Budgeting: Planning and control of capital Expenditures, 3d. ed , Prentic - Hall 1986.

2) Cooper, w.w. and Lelas, v. and Sueyoshi, T. , "Goal programming Models and their duality Relations For use in evaluating Security Portfolio and Regression relations" , European Journal of Operational Research 98 (1997) P.431 - 443.

3) Farrel , james L., Portfolio Managment: Theory and apphtation , 2d. Ed. , MCGROW - Hill 1997.

4) Lee , Sang M. and chesser DaltonL., "Gool programming For portfolio selection" , The journal of portfolio Managment (spring 1980) 22-26.

5) Markowitz , Harry M. , Portfolio selection: efficient Diversification of investments, john wiley 1959.

6) Mulvey, john M. ; Rosenbaum, Daniel P. and shetty Bala. , "Strategic Financial Risk Managment and operations Researeh" , European journal of operational Rsearch , 7 (1997) 1 - 16.

7) Narasimhan R., "Goal programming in Fuzzy Environment" Decision Science, 11 (1980) 325 - 336.

8) Sanant Marshall and levy Haim , Protfolio and Investment selectio , Theory and practice, prantic - Hall, 1984.

9) Sharp william f. , Investments, Prantic - Hall, Englewood cliffs, 1971

10) Spronk , jaap and Hallerbach, winfried, "Finoncial Modeling; where to go? with

an Ill ustration for portfolio manag ment" , European journal of poeratinal Research 99 (1997) 113-125.

۱۱) آذر عادل و معماریانی عزیز ا...، «برنامه‌ریزی شولا تکنیکی نوین برای برنامه‌ریزان»، نشریه‌ی دانشگاه شاهد، شماره ۹ و ۱۰، ۱۳۷۶.

۱۲) اسلامی بیدگلی غلامرضا و هیبتی فرشاد، «مدیریت پرتفوی با استفاده از مدل شاخصی»، تحقیقات مالی شماره‌های ۹ و ۱۰، زمستان ۱۳۷۴ و بهار ۱۳۷۵.

۱۳) منصور مه‌سیما، «کاربرد منطق فازی در مهندسی صنایع»، مجله‌ی صنایع، شماره‌ی ۲ ، زمستان ۱۳۷۲.